



Mathématiques générales (MATH2007)

Année académique 2022-2023

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN DU 5/01/2023 : CORRECTION

Exercices divers

1. (*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)

(a) $3x|x - 2| = x - 2$

(b) $\frac{|1 - x|}{x^2 - 1} \geq x - 1$

(c) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$

(d) $\sin(2x) \leq \sin(x)$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

(a) $S = \{-1/3, 2\}$

(b) $S =] - \infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, \sqrt{2}]$

(c) $S = \left\{ \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}, \frac{17\pi}{8}, \frac{21\pi}{8}, \frac{11\pi}{4} \right\}$

(d) $S = \{\pi\} \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right] \cup \left[\frac{7\pi}{3}, 3\pi \right]$

2. (*) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :

(a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$

(b) $\arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \arccos(\cos(4\pi/3))$

Solution. La première expression est définie et vaut $-\frac{1}{2} - \sin(1)$; la deuxième n'est pas définie.

3. (*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1, 0, a)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(4, 1, 2)$ ($a \in \mathbb{R}$). Calculer

(a) $3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

(b) les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$

(c) les composantes de la projection orthogonale de \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{BC} .

Solution. Le produit scalaire vaut $3 - 9a$ et le produit vectoriel est le vecteur de composantes $(5 - a, -9 - 3a, -8)$.

La projection orthogonale de \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{BC} est le vecteur de composantes $\left(\frac{60 - 9a}{19}, \frac{3a - 20}{19}, \frac{60 - 9a}{19} \right)$

4. (*) Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} .

(a) $x^2 + 2 = -ix$

(b) $27 + x^3 = 0$

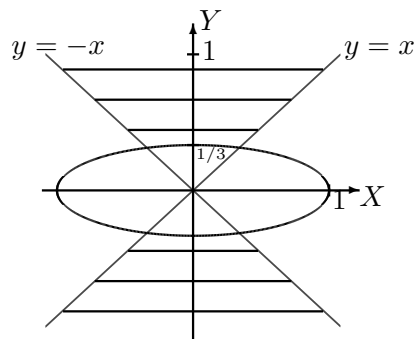
Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

(a) $S = \{-2i, i\}$

(b) $S = \{-3, \frac{3(1 - i\sqrt{3})}{2}, \frac{3(1 + i\sqrt{3})}{2}\}$

5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante

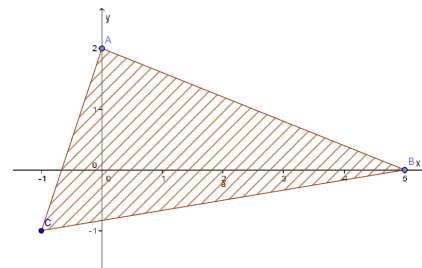
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$



Les points de l'ensemble sont ceux de la partie hachurée.
Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

6. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.

- a) Les trois sommets de ce triangle sont les points A, B, C de coordonnées respectives $(0, 2)$, $(5, 0)$ et $(-1, -1)$. Les droites qui délimitent le triangle ont pour équation $AB \equiv 2x + 5y - 10 = 0$, $AC \equiv 3x - y + 2 = 0$, $BC \equiv x - 6y - 5 = 0$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

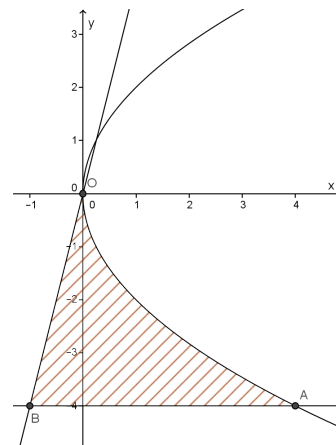
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in \left[\frac{x-5}{6}, 3x+2 \right] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 5], y \in \left[\frac{x-5}{6}, \frac{-2x+10}{5} \right] \right\}.$$

- b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0], x \in \left[\frac{y-2}{3}, 6y+5 \right] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], x \in \left[\frac{y-2}{3}, \frac{-5y+10}{2} \right] \right\}.$$

7. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.

- a) Les trois points A, B, O sont respectivement de coordonnées $(4, -4)$, $(-1, -4)$ et $(0, 0)$.

Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv y = -4$, $BO \equiv 4x - y = 0$. La parabole a pour équation $y^2 = 4x$; dès lors, la courbe délimitant l'ensemble a pour équation $y = -2\sqrt{x}$.

L'ensemble fermé hachuré est donc décrit analytiquement par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [-4, 4x]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 4], y \in [-4, -2\sqrt{x}]\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-4, 0], x \in \left[\frac{y}{4}, \frac{y^2}{4} \right] \right\}.$$

8. Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} et telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\pi/2)^+, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (\pi/2)^-.$$

Si elles existent et si les données sont suffisantes, déterminer les limites suivantes

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x+3)}{|x+1|}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3-1}{-2x} \right)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-1}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} f \left(\left| \frac{1-x^4}{3+x^2} \right| \right)$$

Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf la limite (b). La limite (a) n'existe pas. Les autres valent respectivement π^- , $-\frac{3}{2}$, $\ln(5)-1$, -6 et $(\pi/2)^-$.

9. Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie? dérivable? En déterminer la dérivée première.

Solution. La fonction est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 0[\cup]0, 1[$; sa dérivée première est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in] -1, 0[\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

10. On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$(a) \frac{x}{x^2-1}$$

$$(b) \cos(\sqrt{1-4x^2})$$

$$(c) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$(d) \operatorname{arctg}(\sin(x^2))$$

$$(e) x \pi^x$$

$$(f) x^x$$

$$(g) \ln(|2x+1|+x)$$

$$(h) (x-1)|x-1|$$

Solution. Si A est le domaine de éfinition, B celui de continuité et C celui de dérivation, on a

Fonction	A = B	C	Dérivée
(a) $\frac{x}{x^2 - 1}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$C = A = B$	$\frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$
(b) $\cos(\sqrt{1 - 4x^2})$	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	$\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$	$\frac{4x \sin(\sqrt{1 - 4x^2})}{\sqrt{1 - 4x^2}}$
(c) $\exp\left(\frac{1}{1 - x}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$C = A = B$	$\exp\left(\frac{1}{1 - x}\right) \cdot \frac{1}{(1 - x)^2}$
(d) $\arctg(\sin(x^2))$	\mathbb{R}	$C = A = B$	$\frac{2x \cos(x^2)}{1 + \sin^2(x^2)}$
(e) $x \cdot \pi^x$	\mathbb{R}	$C = A = B$	$\pi^x(1 + x \ln(\pi))$
(f) x^x	$]0, +\infty[$	$C = A = B$	$x^x(\ln(x) + 1)$
(g) $\ln(2x + 1 + x)$	$] -\infty, -1[\cup] -\frac{1}{3}, +\infty [$	$C = A = B$	$\begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{3x+1} & \text{si } x > -1/3 \end{cases}$
(h) $(x - 1) x - 1 $	\mathbb{R}	$C = A = B$	$2 x - 1 $

11. On donne la fonction f définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première des fonctions $g : x \mapsto f(\cos(-x))$ et $h : x \mapsto f(\sqrt{1 - 4x^2})$.

Solution. La fonction g est définie et continue sur \mathbb{R} ; elle est dérivable sur les intervalles du type $]k\pi, (k + 1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$; sa dérivée vaut $(Df)(\cos(-x)) \cdot \sin(-x)$.

La fonction h est définie et continue sur $[-1/2, 1/2]$; elle est dérivable sur $] -1/2, 0[\cup] 0, 1/2 [$; sa dérivée vaut $\frac{-4x}{\sqrt{1 - 4x^2}}(Df)(\sqrt{1 - 4x^2})$.

12. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

$$(a) \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^0 x e^{3x} dx$$

$$(c) \int_{-\infty}^1 \frac{1}{2 - x} dx$$

$$(d) \int_{-4}^4 \sqrt{x^2} dx$$

$$(e) \int_4^5 \frac{2}{x(x^2 - 6x + 9)} dx$$

$$(f) \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 4)^2}} dx$$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto \frac{1}{2-x}$ qui n'est pas intégrable en $-\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 4)^2}}$ qui n'est pas intégrable en 2. Les intégrales valent respectivement

$$(a) -\frac{1}{2} \ln 18 \cdot \ln 2$$

$$(b) -\frac{1}{9}$$

$$(d) 16$$

$$(e) \frac{2}{9}(\ln 5 - 3 \ln 2) + \frac{1}{3}$$

13. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

$$a) D^2 f(x) + f(x) = e^{ix}$$

$$b) 9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Solution. a) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1$ et ses zéros sont i et $-i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre, fonction continue sur \mathbb{R} , est une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme

$$Df_P(x) = A(1 + ix)e^{ix} \text{ et } D^2f_P(x) = A(2i - x)e^{ix},$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$A(2i - x)e^{ix} + Ax e^{ix} = e^{ix}$$

et, en simplifiant, on obtient $A = -i/2$.

Ainsi, $f_P(x) = \frac{-i}{2} x e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_2 e^{-ix} + \left(c_1 - \frac{i}{2} x \right) e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

b) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2) e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{3}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Problèmes élémentaires

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**
 - (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ si cette voiture est équipée de freins normaux
 - (b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?**

Solution. L'étudiant a fourni 63 réponses correctes.